حل نموذج بجروت

(804)-481

موعد شتاء 2019

طاقم الرياضيات

معهد IQ

حل سؤال 1

من معطيات السؤال نستنتج :

* اشترى طلاب طبقة الحوادي عشر 63 بيتا من نوعين : شخصية وعائلية
* عدد البيتا العائلية مساوٍ لـ 2.5 ضعف عدد البيتا الشخصية
* من هاذين المعطيين بيمكننا ان نستنتج عدد البيتا من كل نوع :

نفرض انهم اشتروا x بيتا شخصية

اذا عدد البيتا العائلية التي اشتروها هو $2.5x$

بما انهم بالمجموع اشتروا 63 بيتا من النوعين

اذا يتحقق ان :-

$$x+2.5x=63$$

$$3.5x=63 \rightarrow x=\frac{63}{3.5}=18$$

اذاً اشتروا 18 بيتا شخصية و $63-18=45$ عائلية .

* كذلك معطى :
  * سعر البيتا العائلية مساوٍ 3 اضعاف سعر البيتا الشخصية
  * نفرض ان سعر البيتا ~~العائ~~ الشخصية y اذاً سعر العائلية $3y$
  * بحسب المعطيات
    - التخفيض على البيتا الشخصية 10% أي سعرها بعد التخفيض هو $90\% \cdot y$ او $0.9y$
    - التخفيض على البيتا العائلية 20% ، اي سعرها بعد التخفيض هو $80\% \cdot 3y \leftarrow 0.8 \cdot 3y \leftarrow 2.4y$

اذاً: سعر الشخصية $0.9y$ والعائلية $2.4y$

المبلغ الكلي الذي دفعه الطلاب هو 3477.6 شيكل

اي يتحقق

$$\underbrace{0.9y\cdot(18)}_{\text{ثمن الشخصية}}+\underbrace{2.4y\cdot(45)}_{\text{ثمن العائلية}}=3477.6$$

$$16.2y+108y=3477.6 \rightarrow 124.2y=3477.6$$

$$\rightarrow \boxed{y=28}$$

اذا سعر البيتسا الشخصيه (y) هو $\boxed{28 \text{ شيكل}}$

سعر البيتسا العائليه $(3y)$ هو $3 \cdot 28 \rightarrow \boxed{84 \text{ شيكل}}$

ب. بحسب المعطيات من يشتري 2 بيتسا شخصيه بالسعر الاصلي اي بسعر 28 شيكل للواحدة يحصل على بيتسا ثالثه مجانا . اي يحصل 3 بيتسا بسعر اثنتين

سعر اثنتين بيتسا هو $28 \cdot 2 = 56$.

وبالتالي 3 بيتسا شخصيه مقابل 56 شيكل

اذاً

سعر 3 $\longrightarrow$ 56

$m \longrightarrow 1232$

بحسب قوانين النسبه والتناسب يتحقق

$$m = \frac{1232 \times 3}{56} = 66$$

اي بهذا المبلغ 1232 شيكل بالامكان ان تشتري $\boxed{66 \text{ بيتسا}}$

حل سؤال 2

أ- بحسب معطيات السؤال نفهم ان:-

BM هو نصف قطر الدائرة بحيث $B(3,4)$ و M المركز.

OB مماس للدائرة.

OM مستقيم يمر ب $O(0,0)$ ومعادلته هي $OM: y=\frac{1}{7}x$

وبما ان M تقع على المستقيم M اذاً احداثياتها من الصورة: $M:(x_m, \frac{1}{7}x_m)$

لكي نجد معادلة BM نجد اولاً معادلة OB ومن التعامد

نستنتج ميل BM ومن ثم نجد معادلته:

OB يمر ب $O(0,0)$ و $B(3,4)$ اذاً ميله هو

$$m_{OB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

وبالتالي معادلته $OB: y=\frac{4}{3}x$ (يمر ب $(0,0)$)

اذاً ميل BM هو: $\frac{-1}{\frac{4}{3}} = \frac{-3}{4}$ = ميل BM

اذاً المستقيم BM ميله $\frac{-3}{4}$ ويمر ب $B:(3,4)$

معادلة المستقيم من الصورة $y=mx+n$ - **نعوض:-**

$$4 = -\frac{3}{4}\cdot 3 + n \rightarrow 4 = -\frac{9}{4} + n \rightarrow \boxed{4+\frac{9}{4}=n}$$

$$\rightarrow 4+2\frac{1}{4} = n \rightarrow \boxed{6\frac{1}{4}=n}$$

إذاً معادلة المستقيم BM هي

$$\boxed{BM: y = -\frac{3}{4}x + 6\frac{1}{4}}$$

(ب) لكي نجد معادلة الدائرة يجب ان نجد احداثيات M

كما شرحنا سابقاً فإن احداثيات M هي من الصورة $M(x_m, \frac{1}{7}x_m)$

نعوض في معادلة BM ونجد احداثيات M (لأن M تقع على BM)

$BM: y = -\frac{3}{4}y + 6\frac{1}{4}$ $\qquad$ $M(x_m, \frac{1}{7}x_m)$

$$\frac{1}{7}x_m = -\frac{3}{4}x_m + 6\frac{1}{4}$$

نضرب كل المعادلة ب 28 لنحصل على: (للتخلص من المقامات)

$$28\left(\frac{1}{7}x_m\right) = -\frac{3}{4}\cdot x_m(28) + 6\frac{1}{4}\cdot(28)$$

$$4x_m = -21x_m + 175$$

$$4x_m + 21x_m = 175 \rightarrow 25x_m = 175 \rightarrow x_m = \frac{175}{25}$$

$$\boxed{x_m = 7}$$

نجد y_m ← $y_m = \frac{1}{7}x_m$ ⟵ $\boxed{y_m = \frac{1}{7}\cdot 7 = 1}$

اذا احداثيات M هي $\boxed{M(7,1)}$

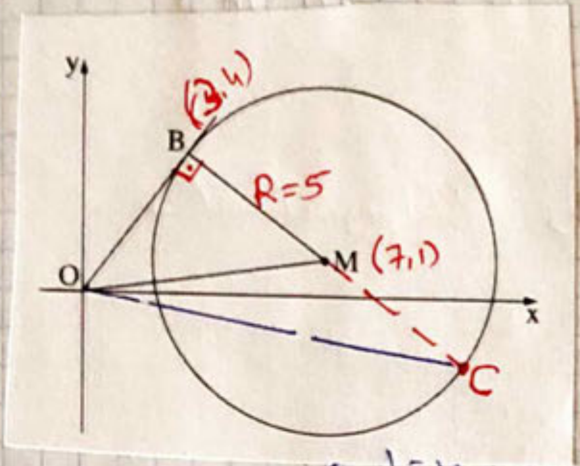
وبالتالي معادلة الدائرة (بهذه المرحلة) هي:

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = R^2$$

نجد R^2 ← نعوض النقطة $B(3,4)$ في معادلة الدائرة:

$$(\underbrace{3-7}_{(-4)})^2 + (\underbrace{4-1}_{(3)})^2 = R^2 \rightarrow 16 + 9 = R^2 \rightarrow 25 = R^2$$

اذا معادلة الدائرة هي: $\boxed{(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25}$



ج- بحسب المعطيات:
امتداد BM يقطع الدائرة في C.
نرسم امتداد BM ونحدد موقع C
(انظر الرسم)

المثلث OBC هو مثلث قائم
لأن $\measuredangle B=90^\circ$ (المماس عمودي على نصف القطر)

من هنا:

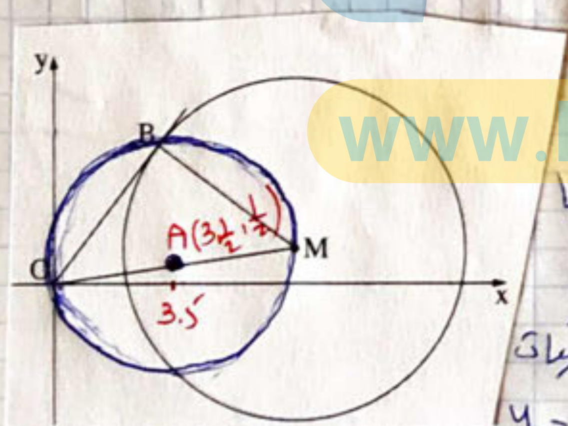
$S_{\triangle OBC}=\frac{OB\cdot BC}{2}$ (مساحة OBC)

BC هو القطر وبما أن نصف القطر R هو $\sqrt{25}=5$ إذاً $\boxed{BC=10}$
بقي علينا إيجاد طول OB // $B(3,4)$ $O(0,0)$

$$OB=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

$$\boxed{OB=5}$$

$$S_{\triangle OBC}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$$
وحدة مساحة.



د. بحسب المعطيات نرسم دائرة إضافية بحيث OM هو قطرها
نفرض مركز هذه الدائرة هو A
إذاً A هي منتصف OM وبالتالي إحداثيات النقطة A هي: $X_A=\frac{X_O+X_M}{2}$ // $y_A=\frac{y_O+y_M}{2}$

$X_A=\frac{0+7}{2}=3.5$ // $y_A=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$ $\Longleftarrow$ $A(3.5,\frac{1}{2})$

لكي نحدد أين تقع A نجد طول القطعة AM وإذا كان طولها أصغر من (R=5) إذاً تقع داخل الدائرة وإذا كان أكبر من R إذاً خارجها

$$AM=\sqrt{(7-3\tfrac{1}{2})^2+(1-\tfrac{1}{2})^2}=\sqrt{(3.5)^2+(\tfrac{1}{2})^2}=\sqrt{12\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}}=\sqrt{12\tfrac{1}{2}}$$

إذاً $AM=\sqrt{12.5}<5$ وبالتالي A تقع داخل الدائرة M

حل سؤال 3

1. أ) بحسب المعطيات هنالك نادي جودو قطري بحيث لـ **8%** من أعضاءه يوجد حزام أسود.

لكي تكون لـ 2 بالضبط من بين 6 أعضاء **حزام أسود**

يجب ان يكون للـ 4 المتبقين حزام ليس أسود. أي يكونوا بدون حزام أسود

احتمال اختيار شخص من النادي لا يوجد معه حزام أسود هو $0.92 = 1-0.08$

والاحتمال المطلوب هو:

$$P = \binom{6}{2}\cdot(0.08)^2\cdot(0.92)^4 = \boxed{0.0688}$$

2. أ) الاحتمال ان لا يكون حزام أسود لأي واحد من الـ 6 هو

$$(0.92)^6 = \boxed{0.6064}$$

ب. بحسب المعطيات $\frac{1}{5}$ أعضاء النادي مرشدون

و 75% من أعضاء النادي الذين لديهم حزام أسود هم مرشدون

وبالتالي يمكن ان نستنتج ان

$\frac{1}{5} = 20\%$ الأعضاء مرشدون وبالتالي $\frac{4}{5} = 80\%$ ليسوا مرشدين (متدربون)

بما انه لـ 75% من أعضاء النادي الذين لديهم حزام أسود هم مرشدون

اذاً المرشدون الذين لديهم حزام أسود **يشكلون** $75\% \cdot 8\% = 0.06$

أي انه 6% من أعضاء النادي هم مرشدون لديهم حزام أسود.

وبالتالي المتدربون الذين لديهم حزام أسود هم $\underbrace{8\%-6\%}_{2\%} \Leftarrow \boxed{2\%}$

ج. الاحتمال المطلوب هو احتمال مشروط:

$$P\left(\text{لديه حزام أسود} \mid \text{متدرب}\right) = \frac{P\left(\text{متدرب} \cap \text{لديه حزام أسود}\right)}{P\left(\text{متدرب}\right)} = \frac{0.02}{0.8} = \boxed{0.025} \quad (\text{من ب})$$

أي الاحتمال ان يكون متدرباً معه حزام أسود هي $\boxed{0.025}$

حل سؤال 4:

أ

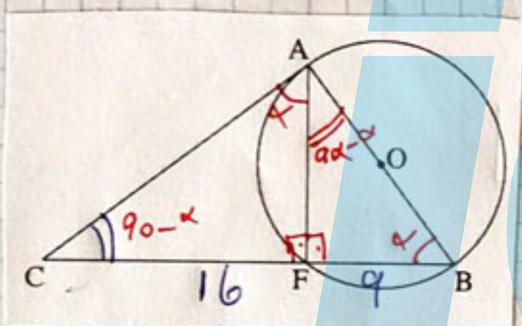
1. بحسب المعطيات CA مماس (A نقطة التماس) وبما أن المماس عمودياً على القطر
إذاً $\measuredangle CAB=90^\circ$
وكذلك بما أن AB قطر إذاً $\measuredangle F=90^\circ$ (محيطية مقابلة للقطر).

إذاً المثلث CAB يشابه المثلث AFB

$\measuredangle CAB=\measuredangle AFB=90^\circ$ بحسب الشرح (1)

$\measuredangle ABF=\measuredangle CAF=\alpha$ ← الزاوية المحصورة بين مماس ووتر. مساوية للزاوية المحيطية المقابلة لنفس الوتر.

إذاً: $\measuredangle FAB=\measuredangle ACB=90-\alpha$
بمجموع زوايا المثلث 180° وهو المطلوب (أ)



ب بحسب المعطيات $CF=16$ و $FB=9$

بالاعتماد على التشابه من البند السابق

نسبة التشابه هي $\frac{AF}{AC}=\frac{FB}{AB}=\frac{AB}{BC}$

$$\frac{9}{AB}=\frac{AB}{25}\Longrightarrow AB^2=9\cdot 25=225$$

$$\boxed{AB=15}$$

ج. مساحة المثلث CFA هي

$$S_{\Delta CFA}=\frac{CF\cdot AF}{2}$$

نجد AF . في المثلث ABF بحسب فيثاغورس يتحقق

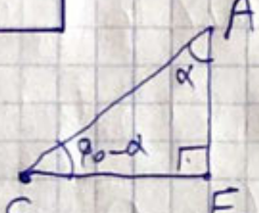
$$(AF)^2+(FB)^2=(AB)^2\longrightarrow (AF)^2+9^2=15^2\rightarrow AF^2=15^2-9^2$$

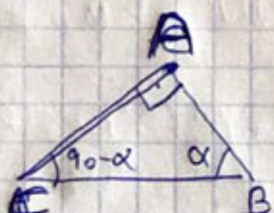
$$\longrightarrow AF^2=225-81=144\longrightarrow \boxed{AF=12}$$

إذاً:

$$\boxed{S_{CFA}=\frac{16\cdot 12}{2}=96}$$

د.





بحسب زوايا المثلثين نرى أن 3 زوايا المثلثين متساوية وبالتالي المثلثين متشابهين وهو المطلوب

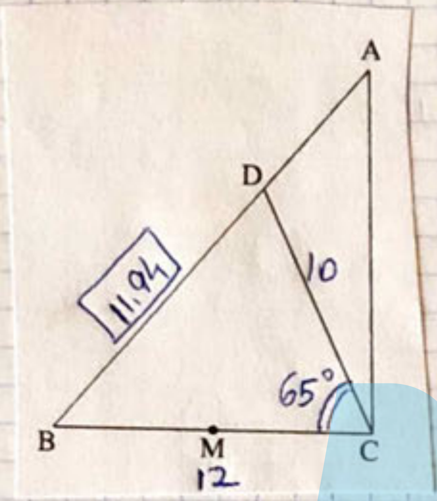
$\Delta CFA \sim CAB$

$\measuredangle C=\measuredangle C$ مشتركة

$\measuredangle CAF=\measuredangle ACB=90-\alpha$

حل سؤال 5:

أ. بحسب قانون ال cos يتحقق (في المثلث BDC)



$$BD^2 = DC^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot DC \cdot \cos 65$$

$$BD^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 65$$

$$BD^2 = 100 + 144 - 240 \cos 65$$

$$BD^2 = 142.572 \rightarrow \boxed{BD = 11.94}$$

ب) مساحة المثلث ADC هي:

$$\frac{1}{2} AD \cdot DC \cdot \sin \angle CDA$$

بحسب البند (أ) $BD = 11.94$ نجد $\angle BDC$ ومن ثم نجد $\angle ADC$

بحسب قانون ال sin يتحقق:

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin \angle DCB} \rightarrow \frac{12}{\sin \angle BDC} = \frac{11.94}{\sin 65}$$

$$\rightarrow \sin \angle BDC = \frac{12 \cdot \sin 65}{11.94} = 0.9109 \rightarrow \boxed{\angle BDC = 65.63°}$$

$$\angle ADC = 180° - \angle BDC = 180° - 65.63° = 114.37°$$

$$\boxed{\angle ADC = 114.37}$$

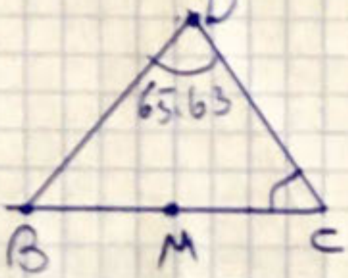
$$\rightarrow S_{\Delta ADC} = \frac{AD \cdot DC}{2} \cdot \sin \angle ADC \qquad AD = \frac{BD}{2} = \frac{11.94}{2}$$

($BD = 2AD$ معطى) $\boxed{AD = 5.97}$

$$S_{\Delta ADC} = \frac{5.97 \cdot 10}{2} \cdot \sin 114.37 = 27.19$$

$$\boxed{\text{مساحة } \Delta ADC = 27.19 \text{ وحدة مساحة}}$$

ج) لكي تكون النقطة M مركز الدائرة المحيطة
بالمثلث BDC يجب ان تكون $\measuredangle D$ قائمة
لانه بهذه الحالة سيكون BC قطر
و الزاويه المحيطيه المقابلة للقطر
هي زاويه قائمة وبما ان زاويه D
ليست قائمة اذا لا يمكن ان تكون
النقطة M هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث BDC



حل سؤال 6

$$f(x) = -2 + \sqrt{-x^2+5x}$$

أ- مجال تعريف الدالة هو مجموعة الأعداد التي تحقق أن:

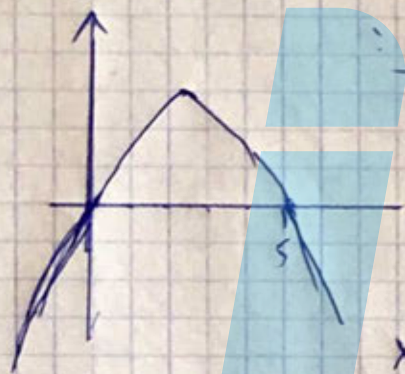
$$-x^2+5x \geq 0$$

وحل هذه المتباينة هو المجال الموجب للدالة التربيعية

الملائمة: $g(x) = -x^2+5x \Leftarrow g(x) = x(5-x)$

النقاط الصفرية لهذه الدالة هي $x=0$ أو $x=5$

والرسم البياني لها $(a<0)$ هو:



$$0 \leq x \leq 5$$

اذا مجال تعريف الدالة f هو $\boxed{0 \leq x \leq 5}$

ب- تقاطع الرسم البياني للدالة مع المحور x

$$f(x)=0 \longrightarrow 0 = -2 + \sqrt{-x^2+5x}$$

$$2 = \sqrt{-x^2+5x} \xrightarrow[\text{تربيع الطرفين}]{} 4 = -x^2+5x$$

$$\rightarrow x^2-5x+4=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm3}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \\ x_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \end{cases}$$

$\boxed{x_1=4}$ $\boxed{x_2=1}$

نقاط التقاطع مع المحور x: $\boxed{(1,0)}$ $\boxed{(4,0)}$

ج - النقاط القصوى وتصنيفها :

$$f(x) = -2 + \sqrt{-x^2+5x}$$

$$(-x^2+5x)' = -2x+5$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{2\sqrt{-x^2+5x}} \cdot (-2x+5)$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x+5}{2\sqrt{-x^2+5x}}} \longrightarrow f'(x) = 0 \longrightarrow -2x+5 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{x = 2.5}$$

تصنيف النقط :

المجال	$x<0$	$x=0$	$0<x<2.5$ $x=1$	$x=2.5$	$2.5<x<5$ $x=3$	$x=5$	$x>5$
x	لا يوجد		1		3		لا يوجد
$f'(x)$			+		−		
$f(x)$		min ←	↗	max	↘	min	

$$f'(1) = \frac{-2\cdot(1)+5}{2\sqrt{-(1)^2+5\cdot 1}} = \frac{3}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} > 0$$

بما ان الدالة تصاعدية في $x=1$

لذلك $x=0$ طرف المجال هو min

$$f'(3) = \frac{-2\cdot 3+5}{+} = \frac{-1}{+} < 0$$

المقام دائما موجب ←

بما ان الدالة تنازلية قبل $x=5$

لذلك $x=5$ تنازلي

نجد قيمة الدالة في النقط القصوى وفي اطراف المجال

$$f(0) = -2 + \sqrt{-(0)^2+5\cdot 0} = -2 \longrightarrow \boxed{(0,-2)\ \text{min}}$$

$$f(2.5) = -2 + \sqrt{-(2.5)^2+5(2.5)} = -2 + \sqrt{-6.25+7.5} = 0.5$$

$$f(5) = -2 + \sqrt{-5^2+5\cdot 5} = -2 \rightarrow \boxed{(5,-2)\ \text{min}} \quad \boxed{\text{max}\ (2.5, 0.5)}$$

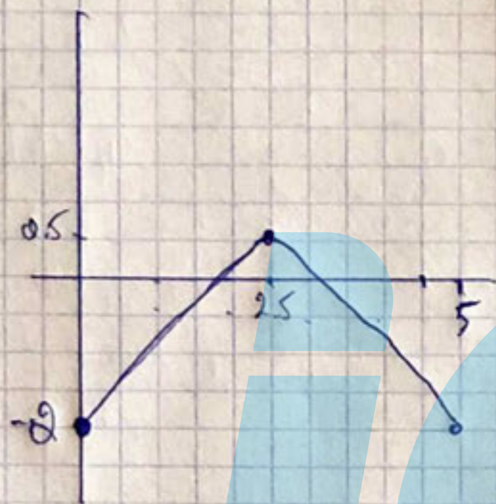
د- المجالات التصاعدية والتنازلية للدالة:

بحسب الجدول السابق:-

المجال التصاعدي: $\boxed{0<x<2.5}$

المجال التنازلي $\boxed{2.5<x<5}$

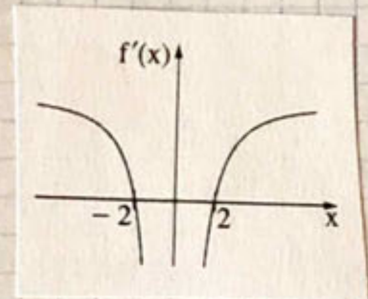
هـ- رسم تقريبي للدالة:



و- $g(x)=f(x)+c$

لكي تكون الدالة $g(x)$ موجبة في كل مجال تعريفها $0\le x\le 5$
يجب ان تتحرك الدالة f الى الاعلى بحيث تصبح
نقاط النهاية لها فوق المحور x (اي y موجب)
اي يجب ان نحرك الرسم الى الاعلى بأكثر من 2 وحدات
لذلك $\boxed{c>2}$

حل سؤال 7



أ- من رسم المشتقة يمكننا بناء جدول لتحديد المجالات الموجبة والسالبة للمشتقة وبالاعتماد عليها نحدد النقاط القصوى ونوعها - نحدد بالجدول النقاط الصفرية للمشتقة والنقاط التي فيها الدالة غير معرفة

x	$x<-2$	-2	$-2<x<0$	0	$0<x<2$	2	$x>2$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	?	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

$x=-2$ מקסימום

$x=2$ מינימום

من الرسم البياني للمشتقة

ب. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + a$

بما أن $f'(-2)=0$ $\leftarrow$ $f'(-2) = -\frac{1}{x^2} + a = 0$

$\rightarrow -\frac{1}{2^2} + a = 0 \rightarrow -\frac{1}{4} + a = 0 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$

ج. (1) من المعطيات $f(2)=10$

$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4}\,dx = +\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + c$

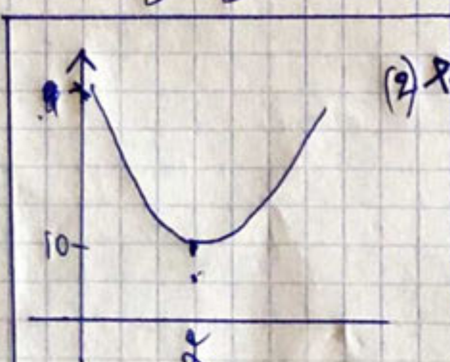
$f(x) = +\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + c$

$f(2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot 2 + c = 10 \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + c = 10$

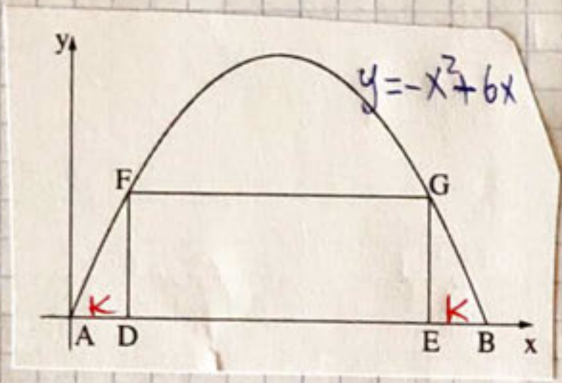
$c = 10 - 1 = 9$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}x + 9}$$

ج. (2)



حل سؤال 8



A و B هي نقاط تقاطع الدالة $y=-x^2+6x$ مع x

أي يتحقق $y=0$

$$-x^2+6x=0$$

$$x(6-x)=0$$

$$\boxed{x=0} \qquad \boxed{x=6}$$

اذاً احداثيات النقطة D تحقق $x_D=k$ وبالتالي $y_D=0$

أي $\boxed{D(k,0)}$ واحداثيات E: $\boxed{E(6-k,0)}$

وطول $DE=FG$ هو $6-2k$ اذاً

$$\boxed{ED=FG=6-2k}$$

لكي نجد FD نعوض $x=k$ بالدالة

لأنه الاحداثي x للنقطة F هو k:

$$y(k)=-k^2+6k$$

وهذا هو طول الضلع FD وايضاً طول GE, (أ)

$$\boxed{FD=GE=-k^2+6k}$$

ب- مساحة المستطيل $= DE\cdot FD$

$$f(k)=\overbrace{(6-2k)}^{DE}\overbrace{(-k^2+6k)}^{FD}=-6k^2+2k^3+36k-12k^2$$

$$f(k)=2k^3-18k^2+36k$$

$$f'(k)=0 \rightarrow f'(k)=6k^2-36k+36=0 \xrightarrow{(:6)} \boxed{k^2-6k+6=0}$$

نحل المعادلة التربيعية حسب الدستور:

$$k_{1,2}=\frac{-(-6)\mp\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot6}}{2}=\frac{6\mp\sqrt{36-24}}{2}=\frac{6\mp\sqrt{12}}{2}$$

$$K_1 = \frac{6+\sqrt{12}}{2} = 4.732 \qquad K_2 = \frac{6-\sqrt{12}}{2} = 1.268$$

نجد المجال الممكن ل K بحسب شروط السؤال:

طول DG هو $6-2K$ ولذلك يجب ان يتحقق:

$$6-2K > 0 \longrightarrow \boxed{K>3}$$

وبالتالي نلغي $K_1 = 4.732 > 3$ (اذا هذا الحل ملغي)

ويبقى الحل $\boxed{K=1.268}$

نبرهن ان هذا ال K يعطينا اكبر مساحة بواسطة y''

$$f'(k) = 6k^2 - 36k + 36$$

$$f''(k) = 12k^2 - 36$$

$$f''(1.268) = 12(1.268)^2 - 36 = -20.784 < 0$$

اذا $\boxed{K=1.268}$ هي نقطة مكسيموم وتعطينا اكبر مساحة